GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2019

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II

Tyd: 1 uur — 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 14 bladsye, 'n Diagramblad en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules:

   Kies **EEN** van die **DRIE** modules:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word.

4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.

5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.

6. **Afronding van finale antwoorde:**

   MODULE 2: **Vier** desimale plekke, tensy anders aangedui.

   MODULE 3: **Twee** desimale plekke, tensy anders aangedui.

   MODULE 4: **Twee** desimale plekke, tensy anders aangedui.

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 'n Groentebak bevat 4 wortels en 7 groenboontjies. Riyaadh haal drie groentes ewekansig uit en eet dit. Bepaal die waarskynlikheid dat

(a) 2 groenboontjies en 1 wortel in enige volgorde geëet sal word. (6)

(b) die derde groente wat geëet word 'n groenboontjie sal wees. (7)

1.2 Uit 'n opname wat by haar skool gedoen is, het Kate bevind dat 60% van die studente 'n horlosie aan hul linkerpols en 30% 'n horlosie aan hul regterpols dra. 10% dra nie 'n horlosie nie.

(a) Hoeveel studente uit 'n ewekansige steekproef van 20 kan Kate verwag sal nie 'n horlosie dra nie? (2)

(b) Bepaal vir 'n ewekansige steekproef van 5 studente die waarskynlikheid dat hoogstens 3 studente 'n horlosie aan hul **regter**pols sal dra. (7)

(c) 'n Ewekansige steekproef van 200 studente is geneem. Gebruik die normaalbenadering en bepaal die waarskynlikheid dat meer as 125 'n horlosie aan hul **linker**pols sal dra. (7)

[29]

VRAAG 2

2.1 Die getal eiers wat deur 'n steekproef van 90 vroulike seemeeue gelê is, word in die tabel getoon.

Getal eiers	1	2	3	4
Frekwensie	15	45	20	10

(a) Bepaal die gemiddelde en standaardafwyking van die getal eiers per seemeeu gelê tot twee desimale plekke. (7)

(b) Seth merk op dat die steekproef nie vroulike seemeeue insluit wat geen eiers gelê het nie. Hoe sal die gemiddelde en standaardafwyking verander indien hierdie seemeeue ingesluit word? (2)

2.2 Wanneer Nicola deur 'n by gesteek word, ontwikkel sy altyd 'n allergiese reaksie. Die tyd in minute wat dit Nicola neem om die reaksie te ontwikkel, kan gemodelleer word deur die waarskynlikheidsdigtheidfunksie wat gegee word deur

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{k}}{\text{x}+1} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{andersins} \end{cases}$$

waar k 'n konstante is.

(a) Toon dat $k = \dfrac{1}{\ln 5}$. (6)

(b) Bepaal die mediaantyd vir Nicola om 'n reaksie te ontwikkel. (6)

[21]

VRAAG 3

3.1 Die stogastiese veranderlike $Z \sim N(0{,}1)$ {d.w.s. met gemiddelde 0 en variansie 1}

- R is die gebeurtenis $Z > 1{,}1$.
- Q is die gebeurtenis $-1{,}8 < Z < 1{,}8$.

Bepaal:

(a) $P(R)$ (3)

(b) $P(R \cup Q)$ (6)

3.2 Die stogastiese veranderlike X het 'n normaalverdeling met 'n gemiddelde van 200 en 'n standaardafwyking van 50. Bepaal die waarde van *c* indien $P(X > c \mid X > 280) = 0{,}625$ gegee word. (8)

[17]

VRAAG 4

4.1 Toe die raad 'n plan vir 'n nuwe pad gepubliseer het, het slegs 15% van die plaaslike inwoners die plan aanvaar. Die raad het toe 'n hersiene plan gepubliseer en uit 'n ewekansige steekproef van 300 plaaslike inwoners het 60 die hersiene plan aanvaar.

(a) Bepaal 'n 98%-vertrouensinterval vir die proporsie van al die plaaslike inwoners wat die **hersiene** plan aanvaar het. (6)

(b) Indien die vertrouensinterval in Vraag 4.1 (a) gebruik word, is daar bewys om die bewering te ondersteun dat die proporsie plaaslike inwoners wat die hersiene plan aanvaar het, groter is as die ondersteuning vir die oorspronklike plan? (2)

4.2 'n Farmaseutiese vervaardiger het twee masjiene gekoop om medisynebottels te vul. Om die prestasie van die twee masjiene te vergelyk, word 'n ewekansige steekproef van 60 bottels wat deur die eerste masjien gevul is en 'n ewekansige steekproef van 50 bottels wat deur die tweede masjien gevul is, nagegaan. Die volumes van die inhoud van die eerste masjien (x) en dié van die tweede masjien (y) word soos volg opgesom:

$n_x = 60$	$\bar{x} = 30{,}06$ ml	$\sigma_x^2 = 0{,}0784$
$n_y = 50$	$\bar{y} = 29{,}84$ ml	$\sigma_y^2 = 0{,}168$

(a) Toets by die 2%-betekenispeil of die gemiddelde volume-inhoud vir die eerste masjien groter is as die gemiddelde volume-inhoud vir die tweede masjien. (10)

(b) Bepaal die stel waardes van α waarvoor daar bewys by die α%-betekenispeil sal wees dat $\mu_x - \mu_y > 0{,}1$. (5)

[23]

VRAAG 5

Beskou die woord **CEASELESS**.

5.1 Op hoeveel maniere kan die letters van die woord **CEASELESS** rangskik word? (4)

5.2 Bepaal die getal verskillende maniere waarop die 9 letters van die woord **CEASELESS** rangskik kan word indien presies twee van die E's langs mekaar is. (6)

[10]

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

In elkeen van die vrae word 'n finansiële scenario beskryf, met drie formules wat gegee word. Kies die formule wat die beste by die scenario pas en skryf net die letter van die formule neer.

1.1 Archie se ouers belê 'n bedrag by die Bank van Engeland vir 'n tydperk van 21 jaar. Die rentekoers is *i*% per jaar, jaarliks saamgestel. Aan die einde van hierdie tydperk is die belegging vier keer die oorspronklike bedrag werd.

A $1 = 4(1 + i)^{21}$

B $4 = (1 + i)^{21}$

C $21 = (1 + i)^{4}$ (2)

1.2 'n Maatskappy betaal kwartaallikse bydraes in 'n delgingsfonds wat op 1 Maart 2020 begin met die laaste betaling op 1 Maart 2026, wanneer die fonds gesluit word.

A $F_v = \dfrac{x\left[\left(1+\dfrac{i}{4}\right)^{24}-1\right]}{\dfrac{i}{4}}$

B $F_v = \dfrac{x\left[\left(1+\dfrac{i}{4}\right)^{24}-1\right]\left(1+\dfrac{i}{4}\right)}{\dfrac{i}{4}}$

C $F_v = \dfrac{x\left[\left(1+\dfrac{i}{4}\right)^{25}-1\right]}{\dfrac{i}{4}}$ (3)

1.3 'n Eenmalige deposito van x verdien rente teen 'n koers van 4% per jaar, maandeliks saamgestel vir die eerste agt maande. Daarna verander die rentekoers na 4,6% per jaar, maandeliks saamgestel vir die volgende 16 maande. Die rekening groei aan tot 'n waarde van y.

A $x\left(1+\dfrac{0,04}{12}\right)^{8}=y\left(1+\dfrac{0,046}{12}\right)^{-16}$

B $x=y\left(1+\dfrac{0,04}{12}\right)^{8}\left(1+\dfrac{0,046}{12}\right)^{16}$

C $x\left(1+\dfrac{0,04}{12}\right)^{-8}\left(1+\dfrac{0,046}{12}\right)^{-16}=y$ (3)

1.4 'n Lening P word verkry teen 'n rentekoers van i% per jaar, maandeliks saamgestel. Die eerste terugbetaling op die lening vind plaas vier maande nadat die lening verkry is. Die lening moet afbetaal word in maandelikse paaiemente van x aan die einde van elke maand vir drie jaar na die verkryging van die lening. Die laaste betaling y is kleiner as die ander betalings.

A $P\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{4}-y\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{33}=\dfrac{x\left[1-\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{-32}\right]}{\dfrac{i}{12}}$

B $P\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{3}=\dfrac{x\left[1-\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{-32}\right]}{\dfrac{i}{12}}+y\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{-33}$

C $P\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{3}=\dfrac{x\left[1-\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{-35}\right]}{\dfrac{i}{12}}-y\left(1+\dfrac{i}{12}\right)^{-36}$ (4)

[12]

VRAAG 2

Vier jaar gelede het Clarence Motormaatskappy 'n bus gekoop vir R1 850 000; dit is nou R920 000 werd. Om nou 'n nuwe bus te koop sal die maatskappy R2 680 000 kos.

2.1 Bereken die jaarlikse waardeverminderingskoers op die waarde van die bus, uitgedruk as 'n persentasie korrek tot twee desimale plekke, in die veronderstelling dat die koers gebaseer word op 'n verminderende saldo. (4)

2.2 Vier jaar gelede het Clarence 'n delgingsfonds begin om nou die aankoop van 'n nuwe bus te dek. Die fonds het rente verdien teen 4,2% per jaar, maandeliks saamgestel. Die ou bus word ingeruil om die nuwe bus te koop en die laaste betaling in die fonds word drie maande voor die einde van die vier jaar gedoen.

Bereken wat die maandelikse bydrae tot die fonds moes gewees het indien Clarence presies vier jaar gelede begin betaal het. (8)

[12]

VRAAG 3

3.1 Bereken die waarde van 'n enkele deposito wat Tshepang teen 'n jaarlikse rentekoers van 8,2%, kwartaalliks saamgestel, moet belê sodat die rekening in een jaar R1 000 rente genereer. (6)

3.2 Lohini het terselfdertyd R2 600 en R1 800 in twee afsonderlike rekeninge belê. Albei rekeninge verdien enkelvoudige rente, maar die R2 600-rekening verdien rente teen 'n koers wat 2,5% per jaar meer is as die rentekoers op die R1 800-rekening. Na 'n jaar het die twee rekeninge saam R274 rente verdien. Bereken die grootste van die twee rentekoerse as 'n persentasie korrek tot twee desimale plekke. (8)

3.3 Bereken tot die naaste maand hoe lank dit sal neem vir R10 000 wat teen 7,2% per jaar, maandeliks saamgestel, belê word om dieselfde waarde op te lewer as R12 000 wat teen 6,4% per jaar, maandeliks saamgestel, belê word. (8)

[22]

VRAAG 4

Die natuurlike leeftyd van 'n renoster is 50 jaar. Vroulike renosters, wat 65% van die populasie vorm, het slegs een kalf **elke vier jaar**. Die natuurlike oorlewingskoers van 'n kalf is 82%. Die gebiedsruimte van renosters is groot en gevolglik word Suid-Afrika se dravermoë vir renosters op slegs 40 000 geraam. Daar is tans ongeveer 18 000 renosters in Suid-Afrika.

4.1 Is dit 'n Malthusiaanse of logistiese model? Verduidelik jou antwoord. (2)

4.2 Twee verskillende grafieke, (a) en (b), van hierdie populasiemodel moet geskets word. Beskryf die vorm van die diskrete grafieke deur een woord uit die lys hieronder te kies:

Lineêr, S-vormig, Eksponensieel, Hiperbolies

(a) Die renosterpopulasie P (op die *y*-as) word teen tyd *n* (op die *x*-as) geskets. (2)

(b) Die proporsionele groeikoers $\frac{\Delta P}{P}$ (op die *y*-as) word teen die renosterpopulasie P (op die *x*-as) geskets. (2)

4.3 Bereken, korrek tot drie desimale plekke, die intrinsieke groeikoers van renosters per vierjaarsiklus. (4)

4.4 Suid-Afrika verloor elke vier jaar 4 000 renosters aan stropery. Herbereken, met inagneming van hierdie nuwe inligting, die intrinsieke groeikoers per vierjaarsiklus wat sal verseker dat die renosterpopulasie minstens stabiel bly. (8)

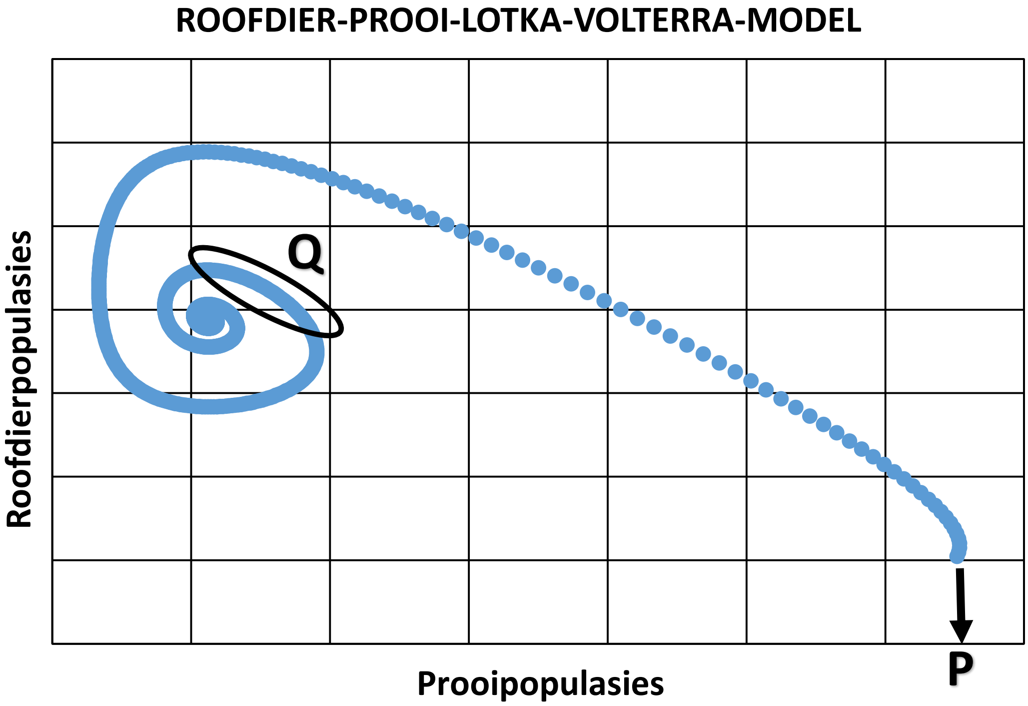
4.5 Neem aan dat die intrinsieke groeikoers per vierjaarsiklus 0,4 is. Bepaal 'n ekwivalente effektiewe **jaarlikse** groeikoers en bereken vervolgens die renosterpopulasie na 6 jaar. (8)

[26]

VRAAG 5

BEANTWOORD HIERDIE HELE VRAAG OP DIE DIAGRAMBLAD WAT VOORSIEN IS.

Die fasestipping verteenwoordig 'n roofdier-prooi-verwantskap tussen twee spesies volgens die Lotka-Volterra-model.



5.1 Die letter **P** en die pyl dui aan waar **op die as** die aanvanklike populasie van die prooi afgelees moet word. Doen die volgende op 'n soortgelyke manier:

(a) Dui met pyle en die letter **A** aan waar op die asse die ewewigs-populasie van elke spesie afgelees moet word. (4)

(b) Dui met 'n pyl en die letter **B** aan waar op die as die maksimum populasie van die roofdiere afgelees moet word. (2)

5.2 Die letter **Q** en die omkringde gebied dui aan waar **op die fasestipping** 'n dalende prooipopulasie en 'n stygende roofdierpopulasie vir die tweede keer voorkom. Doen die volgende op 'n soortgelyke manier:

(a) Dui met 'n omkringde gebied en die letter **C** aan waar op die fasestipping die roofdierpopulasie vir die eerste keer die vinnigste daal. (2)

(b) Dui met 'n omkringde gebied en die letter **D** aan waar op die fasestipping die verandering in die populasies die grootste is van een tydperk na die volgende. (2)

5.3 Gebruik stippellyne en teken die asse in wat die fasestipping in die vier kwadrante verdeel wat die verskillende maniere aandui waarop die populasies styg of daal. (4)

[14]

VRAAG 6

Aan die begin van die nuwe jaar doen Collin 'n eenmalige deposito van R20 000 in 'n rekening wat 4,8% rente per jaar, maandeliks saamgestel, verdien. Hy is vasbeslote om vir die volgende jaar verdere deposito's aan die einde van elke maand in dieselfde rekening te doen. Sy eerste maandelikse deposito sal R400 wees en daarna sal hy elke maandelikse deposito met 0,5% van die vorige maand se deposito vermeerder.

6.1 Bereken die saldo in Collin se rekening aan die einde van elkeen van die eerste drie maande net nadat sy maandelikse deposito gedoen is. (8)

6.2 Ontwerp 'n rekursieformule wat die saldo in Collin se rekening aan die einde van elke maand sal bepaal net nadat sy maandelikse deposito gedoen is. (6)

[14]

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 Matriks $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ word gegee.

Skryf A^{-1}, die inverse van A, neer met heelgetalelemente in die matriks. (4)

1.2 Matrikse $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & y & 4 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & z \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ word gegee.

Bereken die elemente x, y en z indien $C - 3D = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 12 \\ x & 0 & 10 \end{pmatrix}$. (6)

1.3 Indien $det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = k$ gegee word, druk die determinant van die volgende in terme van k uit:

(a) $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$

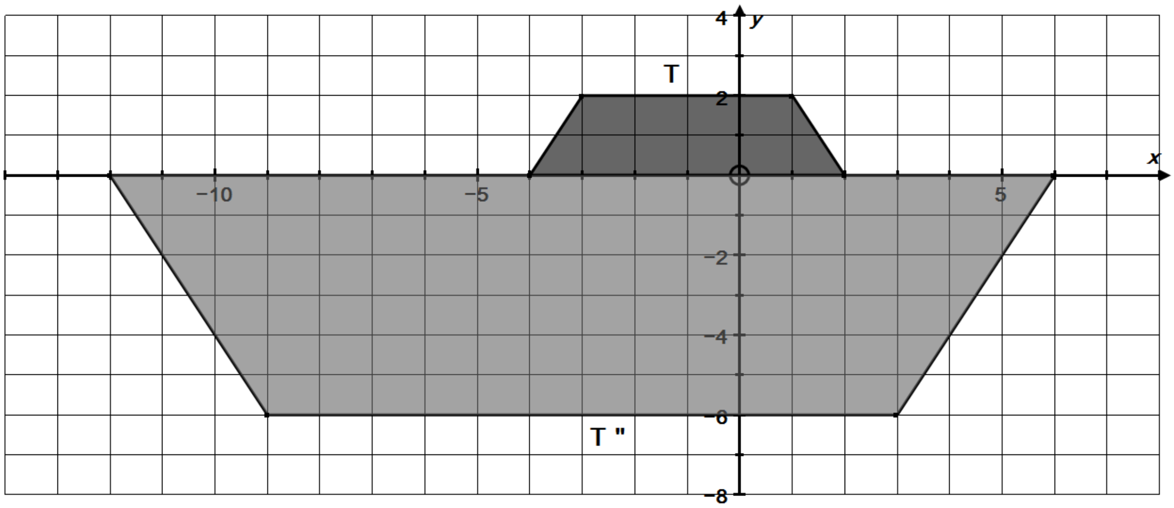
(c) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -3g & -3h & -3i \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} a-d & b-e & c-f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ (8)

[18]

VRAAG 2

2.1 In die skets hieronder is Figuur T verplaas om Figuur T' (nie op die skets getoon nie) te vorm, wat toe vergroot is om Figuur T" te skep.



(a) Beskryf die verplasing van Figuur T na Figuur T' in woorde. (2)

(b) Gee die faktor waarmee Figuur T' vergroot is om Figuur T" te skep. (2)

2.2 Die punt (3; –2) word afgebeeld op (3,232; –1,598) deur 'n refleksie in die lyn $y = mx$. Bepaal die helling van die refleksielyn. (12)

2.3 'n Vertikale lynsegment met eindpunte $(t; v)$ en (t, r) word parallel aan die x-as dwarsgedruk met 'n faktor van k.

(a) Bereken die koördinate van die dwarsgedrukte eindpunte in terme van die veranderlikes k, t, v en r. (6)

(b) Druk die verwantskap tussen m (die gradiënt van die lynsegment nadat dit dwarsgedruk is) en k as 'n vergelyking uit. (4)

[26]

VRAAG 3

Beskou die matrikse $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ en $N = \begin{pmatrix} -192 & -100 & -64 & -60 \\ -32 & 4 & 72 & 52 \\ 42 & 49 & 14 & 17 \\ 6 & 7 & 2 & -33 \end{pmatrix}$

3.1 Verduidelik in woorde waarom ons die tweede ry of die vierde kolom van *M* in plaas van die eerste ry moet gebruik om die determinant van *M* te bereken. (2)

3.2 Toon vervolgens, of andersins, deur berekening dat die determinant van M –248 is. (6)

3.3 Daar word nou gegee dat *N* die minormatriks van *M* is. Skryf vervolgens die inverse van *M* neer. (6)

[14]

VRAAG 4

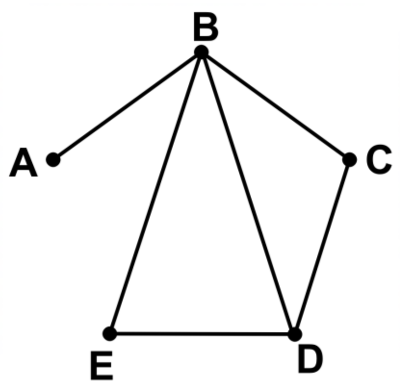
4.1 'n Volledige grafiek het *n* nodusse. Gee in terme van *n*:

(a) die getal skakels wat in 'n spanboom van die grafiek aanwesig is. (2)

(b) die getal skakels wat in die grafiek aanwesig is. (2)

(c) die som van die grade van die nodusse van die grafiek. (2)

4.2 Beantwoord die vrae met verwysing na die skets.



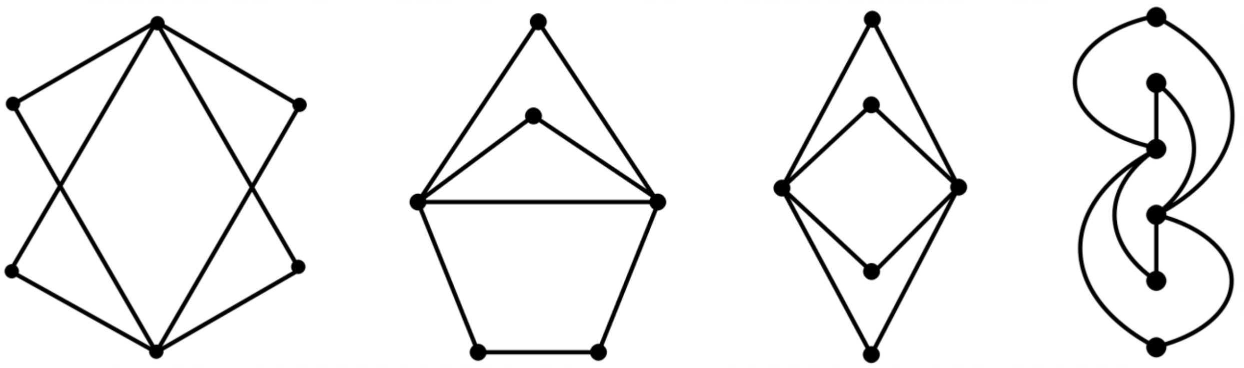
(a) Ontwerp 'n Euler-pad op die grafiek. Gee die volgorde van die skakels wat gekies word, sowel as die begin- en eindnodus duidelik. (4)

(b) Teken die komplement van die grafiek. Benoem die nodusse sorgvuldig. (4)

[14]

VRAAG 5

Vier grafieke met dieselfde orde en grootte word hieronder gegee.



GRAFIEK A GRAFIEK B GRAFIEK C GRAFIEK D

5.1 Nie een van hierdie grafieke is reëlmatig nie. Verduidelik kortliks waarom. (2)

5.2 Dui aan watter grafieke (indien enige) het Hamilton-kringe. (2)

5.3 Noem die grafieke wat isomorfies aan mekaar is. (4)

[8]

VRAAG 6

'n Grafiek word deur die volgende nodusmatriks voorgestel:

	A	B	C	D	E	F	G	H	J
A		5				4		8	6
B	5								3
C								9	5
D					8	10			7
E				8					6
F	4			10			7		
G						7		4	
H	8		9				4		
J	6	3	5	7	6				

6.1 Gebruik die beginsels van Kruskal se algoritme om die spanboom van **maksimum** lengte te bepaal. Noem die volgorde waarin jy die skakels kies, sowel as die lengte van die boom duidelik. (10)

6.2 **BEANTWOORD HIERDIE VRAAG OP DIE DIAGRAMBLAD WAT VOORSIEN IS.**
Gebruik Dijkstra se algoritme om die **kortste** roete van nodus E na nodus G te bepaal. Toon duidelike bewys van jou berekening, bv. 'n boomdiagram, tabel-rekord, in-uit-blok, ens. Maak seker dat jy jou finale roete, sowel as die lengte daarvan, gee. (10)

[20]

Totaal vir Module 4: 100 punte